Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero - Marzo, 2008

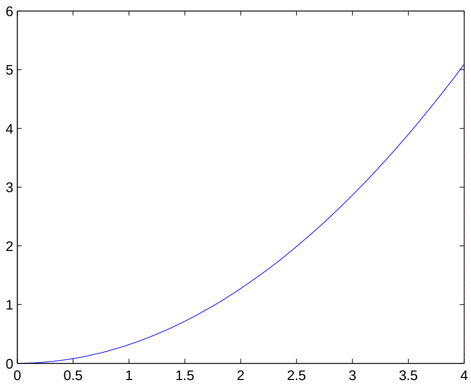
MA-1112 —Practica: semana 5 —

Ejercicios sugeridos para la semana 5. Cubre el siguiente material: Cálculo de volumenes de sólidos de revolución.

Para hallar el volumen de un sólido de revolución utilizaremos los métodos vistos en teoria: Método de discos, arandelas o cascarones (tubos). Para más información vea las ultimas 9 paginas.

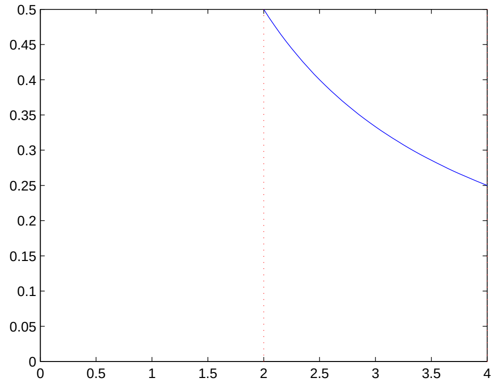
1. En los siguientes problemas dibuje la region R acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y muestre la rebanada representativa. Después encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar R en torno al eje x.

   a) $y = \frac{x^2}{\pi}, x = 4, y = 0.$
   Solución:



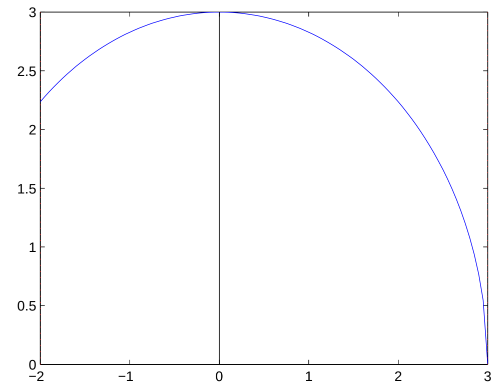
   Utilizando el método de discos: $V = \pi \int_0^4 (\frac{x^2}{\pi})^2 dx = \frac{1024}{5\pi}$.

   b) $y = \frac{1}{x}, x = 2, x = 4, y = 0.$
   Solución:



Utilizando el método de discos: $V = \pi \int_2^4 (\frac{1}{x})^2 dx = \frac{\pi}{4}$.

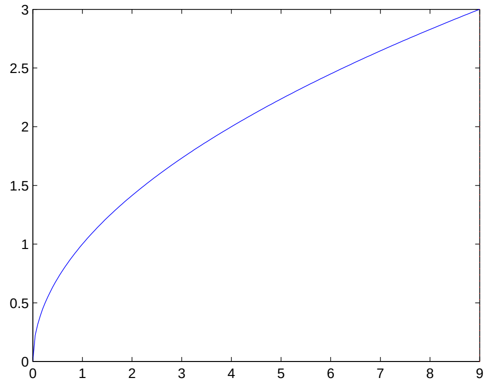
c) $y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0$ entre $x = -2$ y $x = 3$.
Solución:



Utilizando el método de discos: $V = \pi \int_{-2}^3 (\sqrt{9 - x^2})^2 dx = \frac{116\pi}{3}$.

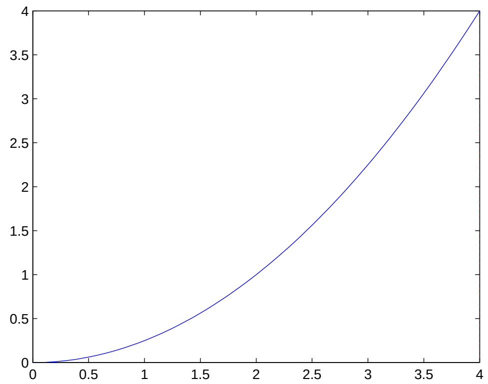
2. En los siguientes problemas dibuje la region R acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y muestre la rebanada representativa. Después encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar R en torno al eje y.

   a) $y = \sqrt{x}, x = 0, y = 3$.
   Solución:



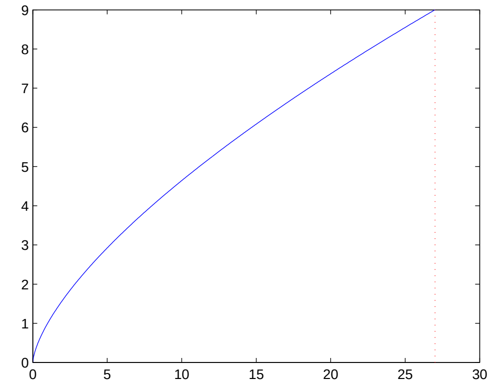
Utilizando el método de cascarones: $V = 2\pi \int_0^9 (3 - \sqrt{x})x dx = \frac{243\pi}{5}$. Otra posibilidad, con el método de discos $V = \pi \int_0^3 (y^2)^2 dy$.

b) $x = 2\sqrt{y}, x = 0, y = 4$.
Solución:



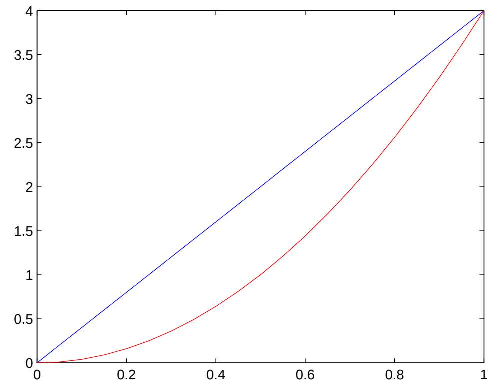
Utilizando el método de cascarones: $V = 2\pi \int_0^4 (4 - (\frac{x^2}{4}))x dx = 32\pi$. Otra posibilidad, con el método de discos $V = \pi \int_0^4 (2\sqrt{y})^2 dy$.

c) $x = y^{3/2}, y = 9, x = 0$.
Solución:



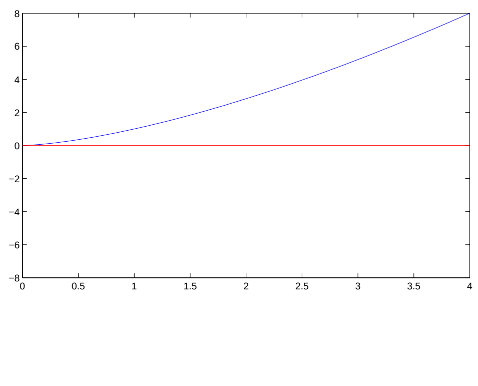
Utilizando el método de cascarones: $V = 2\pi \int_0^{27} x(9 - x^{2/3})dx = \frac{6561\pi}{4}$. Otra posibilidad, con el método de discos $V = \pi \int_0^9 (y^{3/2})^2 dy$.

d) $y = 4x, y = 4x^2$.
Solución:



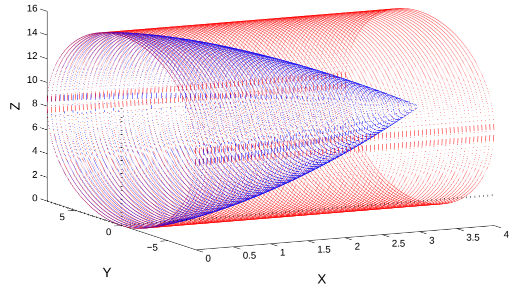
Utilizando el método de cascarones: $V = 2\pi \int_0^1 x(4x - 4x^2)dx = \frac{2\pi}{3}$. Otra posibilidad, con el método de arandelas $V = \pi \int_0^4 ((\frac{\sqrt{y}}{2})^2 - (\frac{y}{4})^2)dy$.

3. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por la curva $y^2 = x^3$, la recta $x = 4$ y el eje x, en torno a:



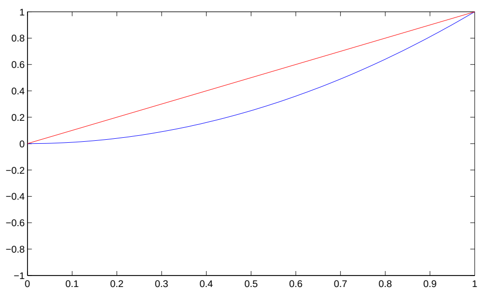
a) La recta $x = 4$.
Solución:
Utilizando el método de cascarones: $V = 2\pi \int_0^4 (4-x)\sqrt{x^3}dx = \frac{1024\pi}{35}$.

b) La recta $y = 8$.
Solución:

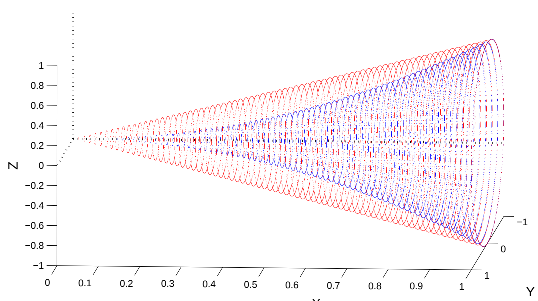


En el grafico, podemos observar que el solido de revolucion cuyo volumen deseamos calcular es la figura de color rojo. Utilizando el método de arandelas: $V = \pi \int_0^4 \left(8^2 - (8-\sqrt{x^3})^2\right)$ $\frac{704\pi}{5}$.

4. Sea R la región acotada por $y = x^2$ y $y = x$. Encuentre el volumen del sólido que resulta cuando R se hace girar alrededor de:



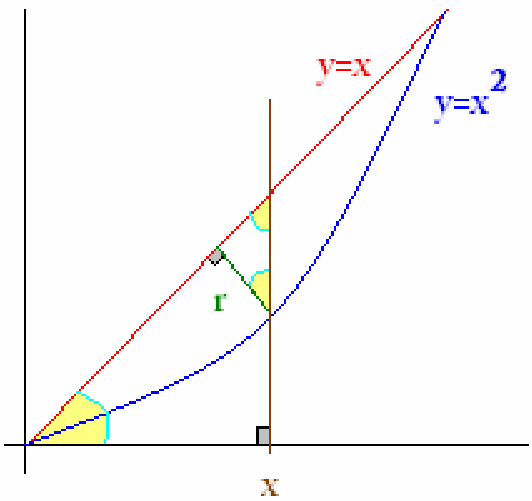
a) El eje x.
Solución:



Utilizando el método de arandelas: $V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \frac{2\pi}{15}$.

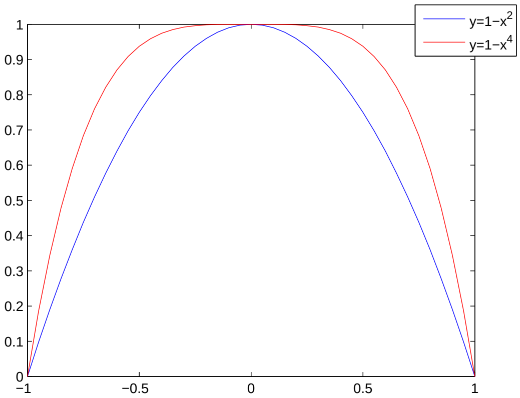
b) El eje y.
Solución:
Utilizando el método de cascarones: $V = 2\pi \int_0^1 (x - x^2)xdx = \frac{\pi}{6}$.

c) La recta $y = x$.
Solución:
Al girar la region acotada por $y = x^2$ y $y = x$ alrededor de la recta $y = x$, podemos observar que al intersectar el solido con cualquier seccion transversal perpendicular nos dara una region cuya area no es ni cuadrada, ni triangular o redonda. Pero, sí concideramos una sección transversal diagonal de manera que la region interseccion resultante sea una circunferencia, tendriamos el area de una figura geometrica conocida; solamente faltara expresar su radio r en función de la variable x.



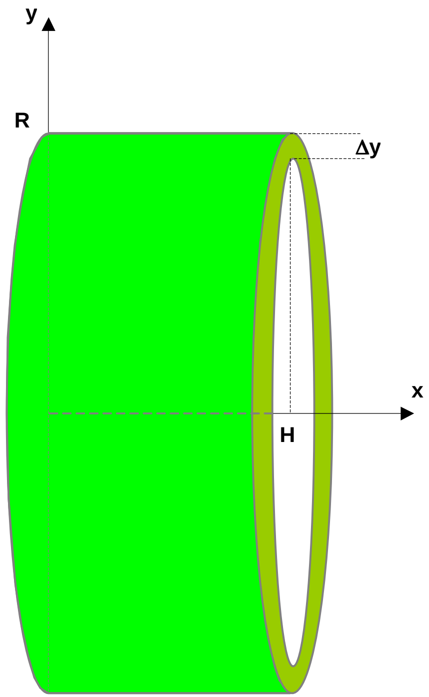
Observando la figura anterior, podemos deducir que $r =$ hipotenusa $\times \cos(\pi/4)$ donde hipotenusa $= x - x^2$. Entonces, $r = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - x^2)$. Por lo tanto, $A(x) = \pi r^2 = \frac{\pi}{2}(x - x^2)^2$ y $V = \int_0^1 A(x)dx$. Es decir, $V = \int_0^1 \frac{\pi}{2}(x - x^2)^2 dx = \frac{\pi}{60}$.

5. La base de un sólido es la región acotada por $y = 1 - x^2$ y $y = 1 - x^4$. Las secciones transversales del sólido, que son perpendiculares al eje x, son cuadrados. Encuentre el volumen del sólido.
Solución:

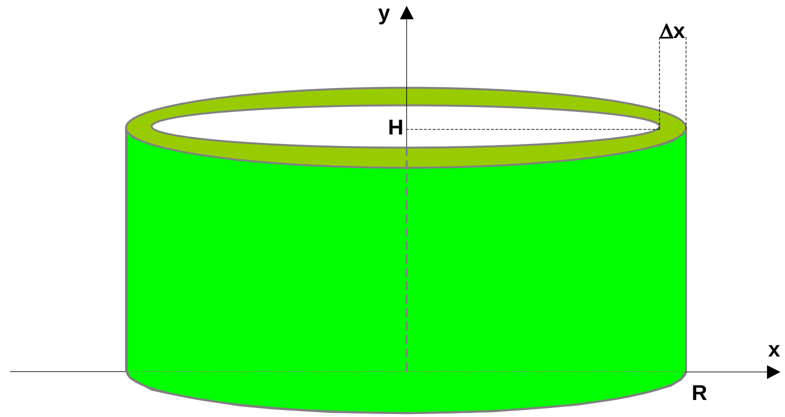


$V = 2\int_0^1 A(x)dx$, con $A(x) = l^2(x)$ (observe que la región de la base del solido es simetrica con respecto al eje y). El lado del cuadrado en función de la variable x esta dado por $l(x) = (1-x^4) - (1-x^2) = x^2 - x^4$. Asi, $V = 2\int_0^1 (x^2 - x^4)^2 dx = \frac{16}{315}$.

TUBOS

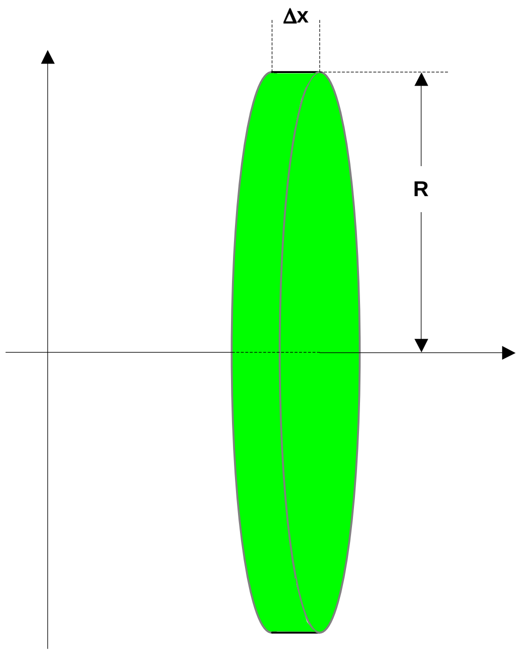


$V_n = 2\,\pi\, R \cdot H \cdot \Delta y$

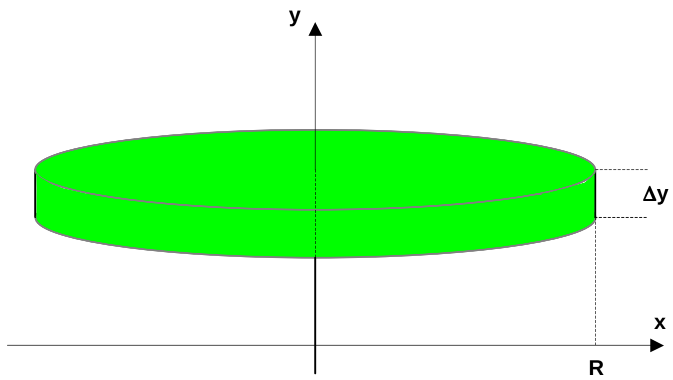


$V_n = 2\,\pi\, R \cdot H \cdot \Delta x$

DISCOS

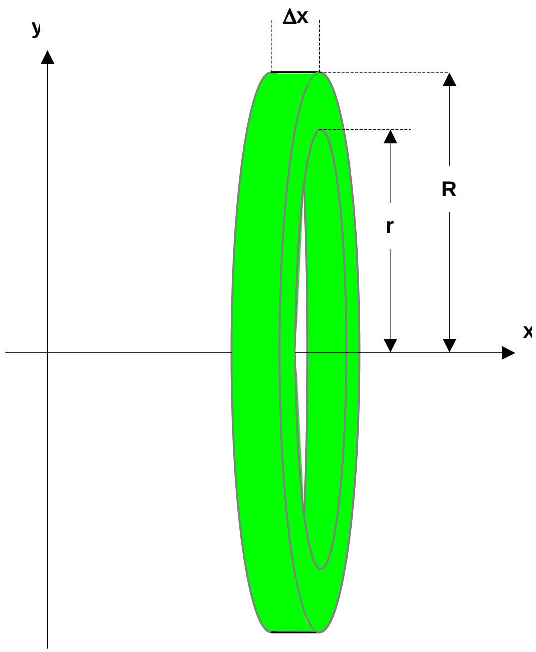


$V = \pi R^2 \cdot \Delta x$

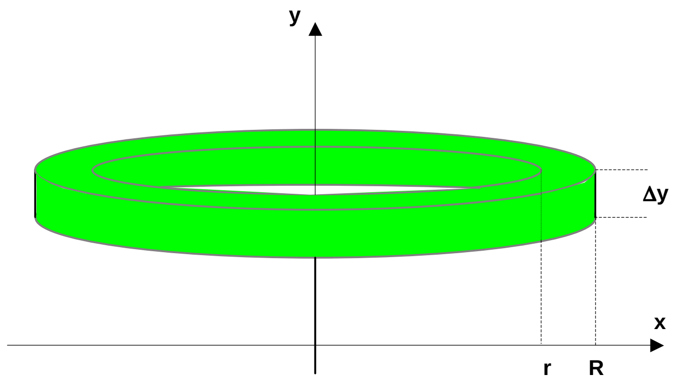


$V = \pi R^2 \cdot \Delta y$

ARANDELAS

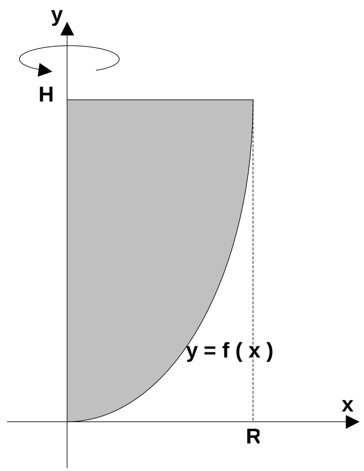


$V = \pi \, (R^2 - r^2) \cdot \Delta x$

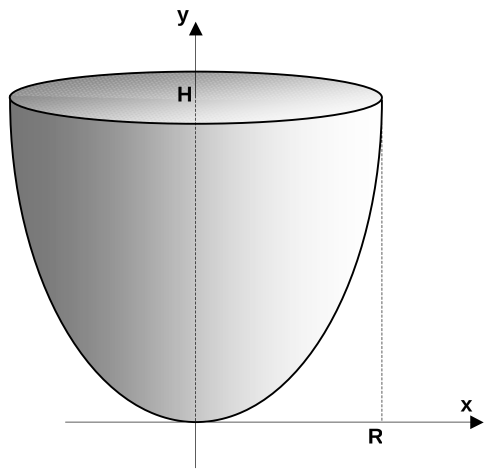


$V = \pi \, (R^2 - r^2) \cdot \Delta y$

Sólido de revolución generado por un recinto plano al girar alrededor del eje OY

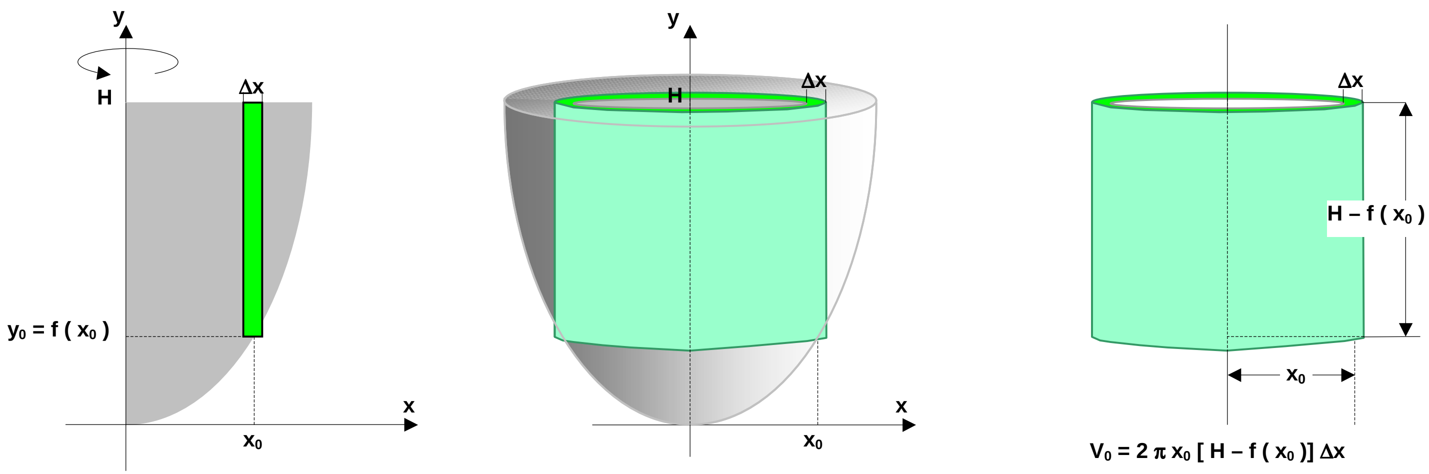


Recinto generador



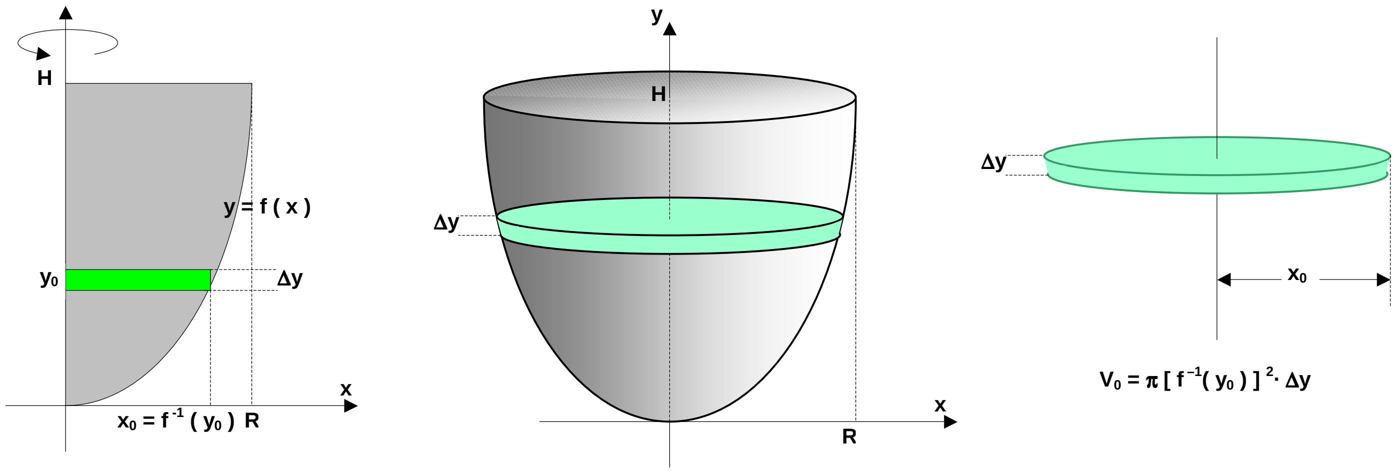
Sólido de revolución generado

Proyección sobre el eje OX:



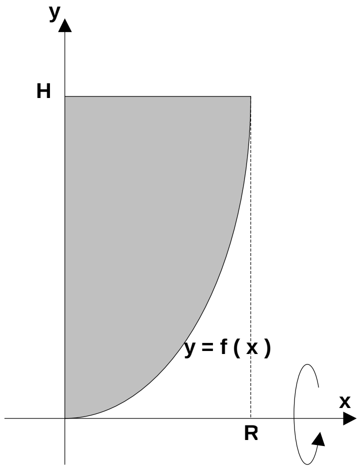
Por tubos: $$\boxed{V = \int_{x=0}^{x=R} 2\pi x \cdot \left[H - f(x)\right] dx}$$

Proyección sobre el eje OY:

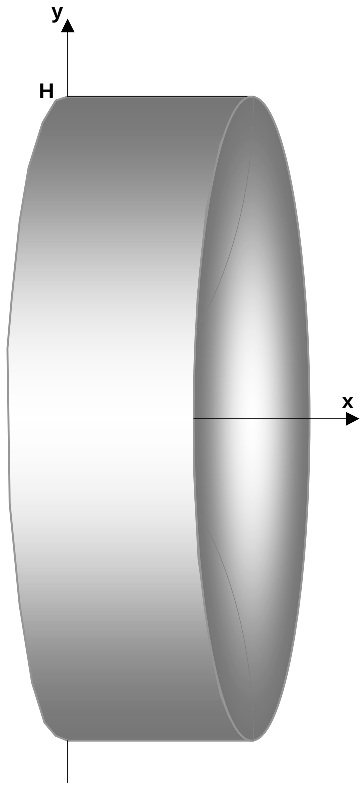


<u>Por discos</u>: $$\boxed{V = \int_{y=0}^{y=H} \pi \left[f^{-1}(y) \right]^2 dy}$$

Sólido de revolución generado por un recinto plano al girar alrededor del eje OX

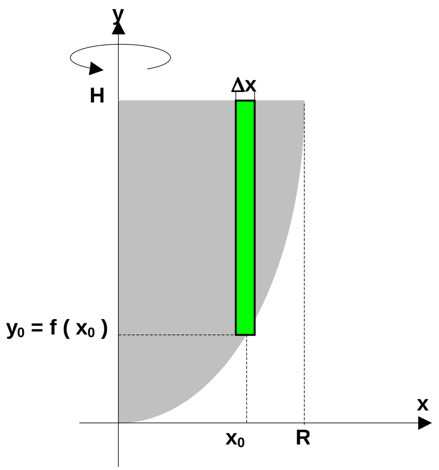


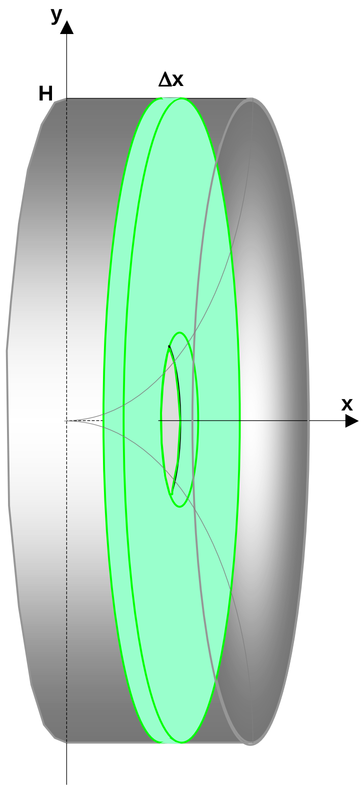
Recinto generador

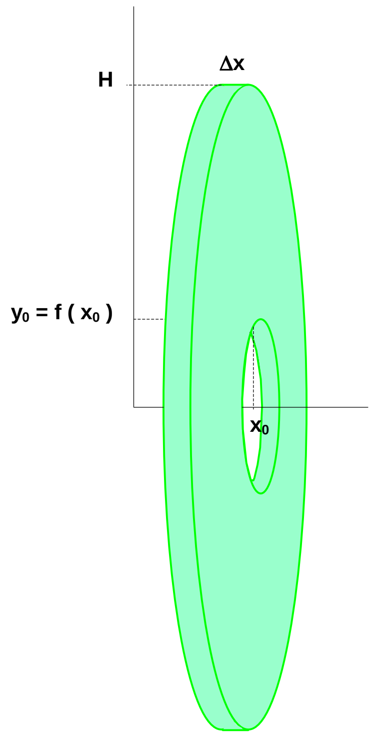


Sólido de revolución generado

Proyección sobre el eje OX:



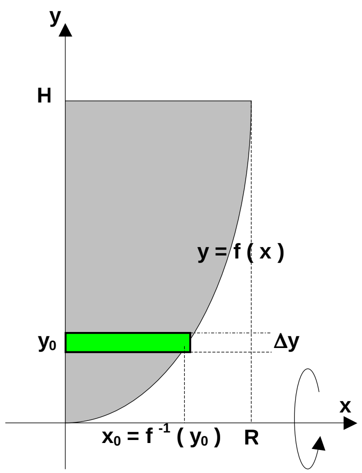


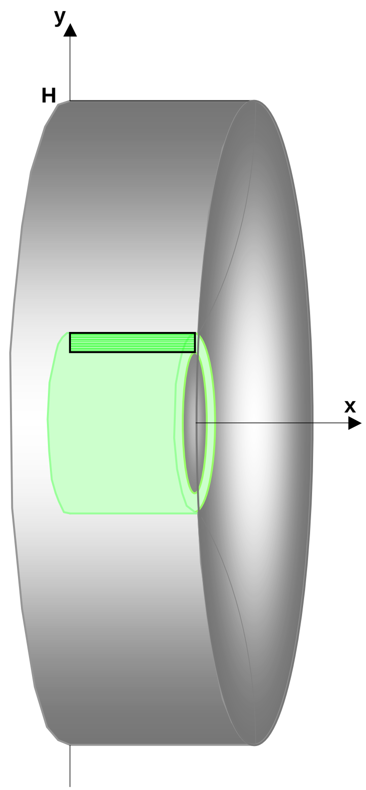


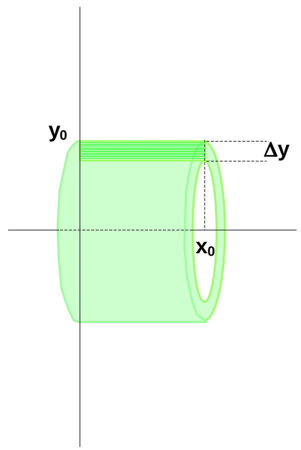
$V_0 = \pi \cdot [H^2 - f^2(x_0)] \cdot \Delta x$

Por arandelas: $\boxed{V = \int_{x=0}^{x=R} \pi \cdot \left[H^2 - [f(x)]^2 \right] dx}$

Proyección sobre el eje OY:







$V_0 = 2\,\pi\, y_0 \cdot f^{-1}(y_0) \cdot \Delta y$

Por tubos: $\boxed{V = \int_{y=0}^{y=H} 2\,\pi\, y \cdot f^{-1}(y)\, dy}$